

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

Chapitres 1 à 5

N. BOURBAKI
ÉLÉMENTS DE
MATHÉMATIQUE



MASSON

Table des matières

CHAPITRE I. — ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES SUR UN CORPS VALUÉ . . .	I.1
§ 1. <i>Espaces vectoriels topologiques</i>	I.1
1. Définition d'un espace vectoriel topologique	I.1
2. Espaces normés sur un corps valué	I.3
3. Sous-espaces vectoriels et espaces quotients d'un espace vectoriel topologique ; produits d'espaces vectoriels topologiques ; somme directe topologique de sous-espaces	I.4
4. Structure uniforme et complétion d'un espace vectoriel topologique	I.5
5. Voisinages de l'origine dans un espace vectoriel topologique sur un corps valué	I.6
6. Critères de continuité et d'équicontinuité	I.8
7. Topologies initiales d'espaces vectoriels	I.9
§ 2. <i>Variétés linéaires dans un espace vectoriel topologique</i>	I.11
1. Adhérence d'une variété linéaire	I.11
2. Droites et hyperplans fermés	I.13
3. Sous-espaces vectoriels de dimension finie	I.14
4. Espaces vectoriels topologiques localement compacts	I.15
§ 3. <i>Espaces vectoriels topologiques métrisables</i>	I.16
1. Voisinages de zéro dans un espace vectoriel topologique métrisable	I.16
2. Propriétés des espaces vectoriels métrisables	I.17
3. Fonctions linéaires continues dans un espace vectoriel métrisable	I.17
Exercices du § 1	I.22
Exercices du § 2	I.25
Exercices du § 3	I.28
CHAPITRE II. — ENSEMBLES CONVEXES ET ESPACES LOCALEMENT CONVEXES .	II.1
§ 1. <i>Semi-normes</i>	II.1
1. Définition des semi-normes	II.1
2. Topologies définies par des semi-normes	II.2
3. Semi-normes dans les espaces quotients et les espaces produits	II.4

4. Critères d'équicontinuité des applications multilinéaires pour les topologies définies par des semi-normes	II.6
§ 2. <i>Ensembles convexes</i>	II.7
1. Définition d'un ensemble convexe	II.7
2. Intersections d'ensembles convexes. Produits d'ensembles convexes	II.9
3. Enveloppe convexe d'un ensemble	II.10
4. Cônes convexes	II.11
5. Espaces vectoriels ordonnés	II.13
6. Ensembles convexes dans les espaces vectoriels topologiques ..	II.14
7. Topologies sur les espaces vectoriels ordonnés	II.17
8. Fonctions convexes	II.17
9. Opérations sur les fonctions convexes	II.19
10. Fonctions convexes dans un ensemble convexe ouvert	II.20
11. Semi-normes et ensembles convexes	II.21
§ 3. <i>Le théorème de Hahn-Banach (forme analytique)</i>	II.22
1. Prolongement des formes linéaires positives	II.22
2. Le théorème de Hahn-Banach (forme analytique)	II.24
§ 4. <i>Espaces localement convexes</i>	II.25
1. Définition d'un espace localement convexe	II.25
2. Exemples d'espaces localement convexes	II.27
3. Topologies localement convexes initiales	II.29
4. Topologies localement convexes finales	II.29
5. Somme directe topologique d'une famille d'espaces localement convexes	II.32
6. Limites inductives de suites d'espaces localement convexes ..	II.34
7. Relèvements dans les espaces de Fréchet	II.37
§ 5. <i>Séparation des ensembles convexes</i>	II.39
1. Le théorème de Hahn-Banach (forme géométrique)	II.39
2. Séparation des ensembles convexes dans un espace vectoriel topologique	II.39
3. Séparation des ensembles convexes dans un espace localement convexe	II.41
4. Approximation des fonctions convexes	II.42
§ 6. <i>Topologies faibles</i>	II.43
1. Espaces vectoriels en dualité	II.43
2. Topologies faibles	II.45
3. Ensembles polaires et sous-espaces orthogonaux	II.47
4. Transposée d'une application linéaire continue	II.49

5. Sous-espaces et espaces quotients d'un espace faible	II.51
6. Produits de topologies faibles	II.53
7. Espaces faiblement complets	II.54
8. Cônes convexes complets dans les espaces faibles	II.56
§ 7. <i>Points extrémaux et génératrices extrémales</i>	II.57
1. Points extrémaux des ensembles convexes compacts	II.57
2. Génératrices extrémales des cônes convexes	II.60
3. Cônes convexes à semelle compacte	II.63
§ 8. <i>Espaces localement convexes complexes</i>	II.64
1. Espaces vectoriels topologiques sur $\mathbb{C}$	II.64
2. Espaces localement convexes complexes	II.65
3. Le théorème de Hahn-Banach et ses applications	II.67
4. Topologies faibles sur les espaces vectoriels complexes	II.68
Exercices du § 2	II.69
Exercices du § 3	II.76
Exercices du § 4	II.78
Exercices du § 5	II.81
Exercices du § 6	II.87
Exercices du § 7	II.92
Exercices du § 8	II.100
CHAPITRE III. — ESPACES D'APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES	III.1
§ 1. <i>Bornologie dans un espace vectoriel topologique</i>	III.1
1. Bornologies	III.1
2. Parties bornées d'un espace vectoriel topologique	III.2
3. Image par une application continue	III.4
4. Parties bornées dans certaines limites inductives	III.5
5. Les espaces E_A (A borné)	III.7
6. Ensembles bornés complets et espaces quasi-complets	III.8
7. Exemples	III.9
§ 2. <i>Espaces bornologiques</i>	III.11
§ 3. <i>Espaces d'applications linéaires continues</i>	III.13
1. Les espaces $\mathcal{L}_\varepsilon(E; F)$	III.13
2. Condition pour que $\mathcal{L}_\varepsilon(E; F)$ soit séparé	III.15
3. Relation entre $\mathcal{L}(E; F)$ et $\mathcal{L}(\hat{E}; F)$	III.16
4. Parties équicontinues de $\mathcal{L}(E; F)$	III.16
5. Parties équicontinues de E'	III.19
6. Le complété d'un espace localement convexe	III.20
7. $\mathfrak{S}$ -bornologies sur $\mathcal{L}(E; F)$	III.22
8. Parties complètes de $\mathcal{L}_\varepsilon(E; F)$	III.22

§ 4. <i>Le théorème de Banach-Steinhaus</i>	III.24
1. Tonneaux et espaces tonnelés	III.24
2. Le théorème de Banach-Steinhaus	III.25
3. Parties bornées de $\mathcal{L}(E; F)$ (cas quasi-complet)	III.27
§ 5. <i>Applications bilinéaires hypocontinues</i>	III.28
1. Applications bilinéaires séparément continues	III.28
2. Applications bilinéaires séparément continues sur un produit d'espaces de Fréchet	III.30
3. Applications bilinéaires hypocontinues	III.31
4. Prolongement d'une application bilinéaire hypocontinue	III.32
5. Hypocontinuité de l'application $(u, v) \mapsto v \circ u$	III.33
§ 6. <i>Le théorème du graphe borélien</i>	III.34
1. Le théorème du graphe borélien	III.34
2. Espaces localement convexes lusiniens	III.35
3. Applications linéaires mesurables sur un espace de Banach ..	III.36
Exercices du § 1	III.38
Exercices du § 2	III.41
Exercices du § 3	III.42
Exercices du § 4	III.44
Exercices du § 5	III.48
Exercices du § 6	III.50
CHAPITRE IV. — LA DUALITÉ DANS LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES	IV.1
§ 1. <i>Dualité</i>	IV.1
1. Topologies compatibles avec une dualité	IV.1
2. Topologie de Mackey et topologie affaiblie sur un espace localement convexe	IV.4
3. Transposée d'une application linéaire continue	IV.6
4. Dual d'un espace quotient et d'un sous-espace	IV.8
5. Dual d'une somme directe, d'un produit	IV.11
§ 2. <i>Bidual. Espaces réflexifs</i>	IV.14
1. Bidual	IV.14
2. Espaces semi-réflexifs	IV.15
3. Espaces réflexifs	IV.16
4. Cas des espaces normés	IV.16
5. Espaces de Montel	IV.18
§ 3. <i>Dual d'un espace de Fréchet</i>	IV.20
1. Espaces semi-tonnelés	IV.20
2. Dual d'un espace localement convexe métrisable	IV.21
3. Bidual d'un espace localement convexe métrisable	IV.22

4. Dual d'un espace de Fréchet réflexif	IV.23
5. La topologie de la convergence compacte sur le dual d'un espace de Fréchet	IV.24
6. Applications bilinéaires séparément continues	IV.25
§ 4. <i>Morphismes stricts d'espaces de Fréchet</i>	IV.26
1. Caractérisations des morphismes stricts	IV.26
2. Morphismes stricts d'espaces de Fréchet	IV.28
3. Critères de surjectivité	IV.30
§ 5. <i>Critères de compacité</i>	IV.32
1. Remarques générales	IV.32
2. Compacité simple des ensembles de fonctions continues	IV.33
3. Les théorèmes d'Eberlein et de Šmulian	IV.35
4. Cas des espaces de fonctions continues bornées	IV.36
5. Enveloppe convexe d'un ensemble faiblement compact	IV.37
<i>Appendice. Points fixes des groupes de transformations affines</i>	IV.39
1. Cas des groupes résolubles	IV.39
2. Moyennes invariantes	IV.40
3. Le théorème de Ryll-Nardzewski	IV.41
4. Applications	IV.44
Exercices du § 1	IV.47
Exercices du § 2	IV.52
Exercices du § 3	IV.58
Exercices du § 4	IV.62
Exercices du § 5	IV.67
Exercices de l'Appendice	IV.72
Tableau des principaux types d'espaces localement convexes	IV.75
Tableau des principales bornologies sur le dual d'un espace localement convexe E	IV.76
CHAPITRE V. — ESPACES HILBERTIENS (THÉORIE ÉLÉMENTAIRE)	V.1
§ 1. <i>Espaces préhilbertiens et espaces hilbertiens</i>	V.1
1. Formes hermitiennes	V.1
2. Formes hermitiennes positives	V.2
3. Espaces préhilbertiens	V.4
4. Espaces hilbertiens	V.6
5. Sous-ensembles convexes d'un espace préhilbertien	V.9
6. Sous-espaces vectoriels et orthoprojecteurs	V.12
7. Dual d'un espace hilbertien	V.15
§ 2. <i>Familles orthogonales dans un espace hilbertien</i>	V.17
1. Somme hilbertienne externe d'espaces hilbertiens	V.17

2. Somme hilbertienne de sous-espaces orthogonaux d'un espace hilbertien	V.18
3. Familles orthonormales	V.21
4. Orthonormalisation	V.23
§ 3. <i>Produit tensoriel d'espaces hilbertiens</i>	V.25
1. Produit tensoriel d'espaces préhilbertiens	V.25
2. Produit tensoriel hilbertien d'espaces hilbertiens	V.28
3. Puissances symétriques hilbertiennes	V.29
4. Puissances extérieures hilbertiennes	V.33
5. Multiplication extérieure	V.35
§ 4. <i>Quelques classes d'opérateurs dans les espaces hilbertiens</i>	V.37
1. Adjoint	V.37
2. Applications linéaires partiellement isométriques	V.41
3. Endomorphismes normaux	V.42
4. Endomorphismes hermitiens	V.43
5. Endomorphismes positifs	V.45
6. Trace d'un endomorphisme	V.47
7. Applications de Hilbert-Schmidt	V.51
8. Diagonalisation des applications de Hilbert-Schmidt	V.54
9. Trace d'une forme quadratique par rapport à une autre	V.56
Exercices du § 1	V.59
Exercices du § 2	V.69
Exercices du § 3	V.72
Exercices du § 4	V.73
Note historique	V.79
Bibliographie	V.91
Index des notations	350
Index terminologique	352
Résumé de quelques propriétés importantes des espaces de Banach	359
Table des matières	363