

COLLECTION MÉTHODES

DISTRIBUTIONS,
ANALYSE MICROLOCALE,
ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES
PARTIELLES

CLAUDE WAGSCHAL

*Master / Doctorat
Écoles d'ingénieur*

MATHÉMATIQUES


hermann

Table des matières

1 Distributions	1
Sommaire	3
A Définitions	5
1.1 Définition et exemples	5
1.2 Topologies faible et forte	11
1.3 Distributions d'ordre fini	14
B Opérations élémentaires et propriétés	18
1.4 Introduction	18
1.5 Multiplication	19
1.6 Dérivation	20
1.7 Dérivation en dimension 1	25
1.8 Dérivation en dimension supérieure	32
1.9 Restriction, support	36
1.10 Recollement de distributions	40
1.11 Distributions à support compact	42
1.12 Théorèmes de structure	49
C Distributions tempérées	54
1.13 Distributions tempérées	54
1.14 Structure des distributions tempérées	58
1.15 Transformation de Fourier	60
D Produit tensoriel, convolution	67
1.16 Produit tensoriel de distributions	67
1.17 Convolution	75
1.18 Régularisation par convolution	84
1.19 Convolution et transformation de Fourier	88
1.20 Distributions dont les dérivées premières sont données	91

E	Noyaux distributions	95
1.21	Opérateurs linéaires et noyaux	95
1.22	Opérateur propre	99
1.23	Opérateur régularisant	106
F	Corrigé des exercices	113
1.24	Exercices du chapitre 1.A	113
1.25	Exercices du chapitre 1.B	117
1.26	Exercices du chapitre 1.C	140
1.27	Exercices du chapitre 1.D	147
2	Espaces de Sobolev	153
	Sommaire	155
A	Espaces de Sobolev	158
2.1	Espaces H^s , $s \in \mathbb{Z}$	158
2.2	Le problème de Dirichlet pour le laplacien	166
2.3	Le théorème de Rellich	169
2.4	Formulation variationnelle du problème de Dirichlet	172
2.5	L'inégalité de Gårding	176
2.6	Espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$,	182
2.7	Espaces H_{loc}^s	194
2.8	Régularité intérieure	201
2.9	Théorème de trace sur un hyperplan	207
2.10	Espaces de Sobolev dans un demi-espace	212
2.11	Espace $H_0^s(\mathbb{R}_+^n)$	220
2.12	Espaces $H^s(\overline{\Omega})$	229
2.13	Espaces de Sobolev sur une variété	235
2.14	Régularité jusqu'au bord	248
B	Corrigé des exercices	258
2.15	Exercices du chapitre 2.A	258
3	Analyse microlocale	273
	Sommaire	275
A	Symboles	277
3.1	Introduction	277
3.2	Espaces de symboles	278
3.3	Topologie de S^m	280
3.4	Sommes asymptotiques	284

B	Intégrales oscillantes	290
3.5	Le théorème fondamental	290
3.6	Support singulier	295
C	Opérateurs intégraux de Fourier, opérateurs pseudo-différentiels	299
3.7	Opérateurs intégraux de Fourier	299
3.8	Opérateurs pseudo-différentiels	304
3.9	Opérateur pseudo-différentiel propre	306
3.10	Symbole complet d'un o.p.d.	308
3.11	Composition d'o.p.d.	314
3.12	O.p.d. elliptique	317
3.13	Action des o.p.d. sur les espaces de Sobolev	320
3.14	Le problème de Dirichlet	325
3.15	Réduction de symboles multiples	329
3.16	O.p.d. de symbole S_b^m	335
3.17	Front d'onde	343
3.18	Front d'onde des distributions $I(a, \varphi)$	351
3.19	O.p.d. et front d'onde	355
4	Équations aux dérivées partielles	359
	Sommaire	361
A	Problèmes aux limites	364
4.1	Introduction	364
4.2	Étude d'une équation différentielle ordinaire	366
4.3	Minoration de l'opérateur dans un demi-espace	371
4.4	Minoration de l'opérateur dans un ouvert	383
4.5	Le théorème principal, application au problème de Neumann	390
B	Problème de Cauchy strictement hyperbolique	392
4.6	Introduction	392
4.7	Opérateurs différentiels sesquilinéaires	393
4.8	Opérateur hyperbolique	399
4.9	Inégalité d'énergie	406
4.10	Espaces fonctionnels	410
4.11	Théorème de Radon-Nikodym vectoriel	418
4.12	Espaces $H^{s,m}$	423
4.13	Résolution du problème de Cauchy	431
4.14	Vitesse finie de propagation	437
4.15	Opérateurs bien décomposables	446
4.16	Paramétrix, propagation des singularités	450

C	Propagation des singularités dans le domaine complexe	458
4.17	Introduction	458
4.18	Systèmes d'équations aux dérivées partielles	460
4.19	Le théorème d'uniformisation de J. Leray	462
4.20	Problème de Cauchy ramifié	467
4.21	Réduction à un problème intégral-différentiel	469
4.22	Preuve du théorème 4.21.2	471
D	Problème de Goursat holomorphe	476
4.23	Le théorème de Lednev	476
4.24	Preuve du théorème 4.23.1	477
E	Équations fuchsienues de Baouendi-Goulaouic	480
4.25	Problème holomorphe	480
4.26	Problème partiellement holomorphe	486
	Bibliographie	495
	Notations	499
	Index	503