



Introduction à l'algèbre linéaire

Ozgur Gün et Sophie Jallais

Gün, Ozgur

Jallais, Sophie (1962-....)

PUF, Paris

Licence. Economie

ISBN: 978-2-13-058380-6

Table des Matières

Introduction à l'algèbre linéaire

Ozgür Gün et Sophie Jallais

puf

Présentation	9
1L'omniprésence de l'algèbre linéaire	9
2Une approche originale	10
I.Résolution de systèmes d'équations linéaires par la méthode du pivot de Gauss	13
1Résolution par substitution	14
2La méthode du pivot de Gauss	18
a-La méthode	18
b-Différents types de systèmes carrés	22
c-Cas des systèmes rectangulaires	24
3Applications économiques	27
a-Le choix du consommateur dans le modèle de concurrence parfaite	27
b-L'équilibre global du modèle IS-LM	29
Exercices	33
Solutions des exercices	34
II.Matrices et système d'équations linéaires	39
1Représentation matricielle d'un système d'équations linéaires	39
2Quelques matrices particulières	42
a-Matrices nulles	42
b-Matrices triangulaires	42
c-Matrices diagonales	43
d-Matrices identité d'ordre n	44
e-Matrices symétriques	44
3Opérations sur les matrices	45
a-Somme de deux matrices	45
b-Produit d'une matrice par un nombre	46
c-Produit d'une matrice par une matrice colonne à droite	47
d-Produit de deux matrices	48
e-Matrice inverse d'une matrice carrée	52
f.Retour sur la méthode du pivot	53

g-Détermination de l'inverse d'une matrice carrée par la méthode du pivot	55
h-Pour en savoir plus - Pivot et produit matriciel	59
4Application: tableau entrée-sortie de Leontief et matrice structurelle d'une économie	60
Exercices	64
Solutions des exercices	65
III.Rang d'une matrice et existence de solutions d'un système d'équations linéaires	69
1Dépendance ou indépendance linéaire des colonnes d'une matrice	69
a-Dépendance linéaire des colonnes d'une matrice	69
b-Indépendance linéaire des colonnes d'une matrice	71
c-Méthode	72
2Dépendance ou indépendance linéaire des lignes d'une matrice	79
3Rang d'une matrice	80
a-Définitions	80
b-Propriétés	81
c-Méthode	81
d-Existence de solutions des systèmes d'équations linéaires	83
Exercices	84
Solutions des exercices	86
IV.Les espaces vectoriels	89
1Structure d'espace vectoriel	89
a-L'exemple de $(\dots)^2$	89
b-Définition d'un espace vectoriel sur $(\dots)$	92
c-Les sous-espaces vectoriels	93
d-Systèmes générateurs d'un espace vectoriel	97
2Bases d'un espace vectoriel	104
a-Définition	106
b-Propriétés des bases	106
c-Coordonnées d'un vecteur dans une base	109
3Dimension d'un espace vectoriel	111
a-Définition	111
b-Propriétés	111
c-Dimension, bases et solutions d'un système d'équations linéaires	116
Exercices	120
Solutions des exercices	122
Annexe	127
V.Les applications linéaires	131
1Quelques rappels sur les applications	131
2Définition et propriétés	133
a-Définition d'une application linéaire	133
b-Image par une application linéaire du vecteur nul	135

3Représentation matricielle d'une application linéaire	136
a-Principe	136
b-Exemples	138
c-Pour en savoir plus - Autres matrices d'une application linéaire	139
4Rang et noyau d'une application linéaire	144
a-Image d'une application linéaire	144
b-Rang d'une application linéaire	145
c-Noyau d'une application linéaire	150
d-Le théorème des dimensions	153
e-Détermination de $\ker f$ lorsque l'on connaît sa dimension	154
f-Les isomorphismes	156
g-Retour sur la résolution de systèmes d'équations	157
Exercices	158
Solutions des exercices	159
VI.Déterminant d'une matrice carrée	163
1Caractéristique de la fonction déterminant	163
a-Une fonction multilinéaire	163
b-Une fonction alternée	166
2Méthode de calcul du déterminant	168
a-Premières méthodes	168
b-De l'utilité du «pivot»	177
3Autres propriétés des déterminants	183
a-Déterminant de la transposée d'une matrice	183
b-Déterminant du produit de deux matrices	184
4La règle de Cramer	185
a-Détermination de la règle de Cramer	185
b-Application: la détermination des multiplicateurs dans le modèle IS-LM	187
5Inverse d'une matrice	189
Exercices	192
Solutions des exercices	193
VII.Diagonalisation de matrices carrées	197
1Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée	198
a-Définitions	198
b-Recherche des valeurs propres d'une matrice	199
c-Recherche des vecteurs propres d'une matrice	204
2Matrices diagonalisables	208
a-Présentation	208
b-Méthode et exemples	211
c-Conséquences de la diagonalisation d'une matrice	212
3Applications	216
a-Matrices productives	216
b-Analyse des systèmes dynamiques linéaires	221

Exercices	227
<i>Solutions des exercices</i>	228
Annexe	236
VIII.Diagonalisation de matrices symétriques	239
1Produit scalaire, norme et orthogonalité de vecteurs	239
a-Le produit scalaire de deux vecteurs d'un même espace vectoriel	240
b-Norme d'un vecteur	241
c-Pour en savoir plus - Interprétation géométrique du produit scalaire	244
d-Vecteurs et espaces vectoriels orthogonaux	246
e-Pour aller plus loin - Bases orthonormées	248
f-Application: le modèle de régression linéaire	250
2Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice symétrique	253
3Application: l'analyse en composantes principales	259
Exercices	262
<i>Solutions des exercices</i>	263
IX.Formes quadratiques: présentation et applications	267
1Les formes quadratiques	267
a-Présentation	267
b-Formes quadratiques et matrices symétriques	268
c-Formes quadratiques définies, semi-définies, indéfinies	270
d-Exemple de forme quadratique définie positive: les moindres carrés	273
2Extrema d'une fonction de plusieurs variables (sans contrainte)	275
a-Condition nécessaire ou condition du premier ordre	276
b-Condition suffisante ou condition du second ordre	277
3Concavité (convexité) d'une fonction de deux variables	282
Exercices	285
<i>Solutions des exercices</i>	286
Index	289
Bibliographie	293