



Introduction à la topologie générale : cours d'algèbre et topologie générale à l'usage des licences de mathématiques et d'informatique : licence, master

I, ingénieur

Fidèle Ayissi Etémé

Etémé, Fidèle Ayissi (1940-....)

Hermann, Paris

Méthodes

ISBN: 978-2-7056-6892-1

Table des Matières

Introduction à la Topologie Générale

Cours d'Algèbre et Topologie Générale à l'usage des licences de Mathématiques et d'Informatique

Fidèle Ayissi Etémé

Hermann

Dédicaces	i
Remerciements	iii
Introduction	1
1Espaces métriques (généralités)	3
1.1Notions métriques	3
1.1.1Distance - Espace métrique	3
1.1.2Propriétés élémentaires d'une distance	3
1.1.3Espace ultramétrique	4
1.1.4Exemple de distances	4
1.1.5Norme - Espace normé	4
1.1.6Isométrie	6
1.1.7Transport d'une distance	6
1.1.8Boules et sphères	8
1.1.9Distance d'un point à un ensemble	9
1.1.10Distance de deux ensembles	10
1.1.11Diamètre d'un ensemble	10
1.1.12Ensembles bornés	11
1.1.13Produit fini d'espaces métriques	12
1.1.14Distances équivalentes	13
1.1.15Normes équivalentes	13
1.2Notions topologiques	14
1.2.1Voisinages d'un point	14
1.2.2Ouverts et fermés	16
1.2.3Adhérence	18
1.2.4Partie partout dense	20
1.2.5Intérieur-Extérieur-Frontière	20
1.2.6Sous-espaces métriques	21
1.3Continuité et limites (1 ^{ère} partie)	23
1.3.1Continuité en un point (notion topologique)	23

1.3.2Continuité sur une partie (notion topologique)	24
1.3.3Continuité uniforme (notion métrique)	25
1.3.4Etude des suites	26
1.3.5Suite de Cauchy-Espaces complets (notions métriques)	27
1.4Théorème du point fixe	28
1.4.1Majoration de l'erreur	30
1.4.2Point fixe dépendant d'un paramètre	33
1.5Continuité et limites (2 ^{ème} partie)	34
1.5.1Retour sur la continuité	34
1.5.2Séparation par des ouverts	35
1.5.3Homéomorphismes	35
1.5.4Cas des espaces produits	37
1.5.5Limite d'une fonction en un point	39
1.5.6Prolongement par continuité	40
1.5.7Suites extraites-valeurs limites	42
1.5.8Propriété des espaces complets	44
1.5.9Conservation de la complétude	45
2Convexité, connexité, compacité	49
2.1Convexité	49
2.1.1Cas d'un espace vectoriel normé	53
2.2Connexité (étude topologique)	54
2.2.1Connexité et continuité	56
2.2.2Produit d'espaces connexes	58
2.2.3Espace localement connexe	58
2.2.4Composantes connexes	59
2.3Connexité (étude métrique)	59
2.3.1Connexité dans (...)	59
2.3.2Espaces bien enchainés	61
2.4Connexité par arcs	62
2.4.1Propriétés de la connexité par arcs	64
2.4.2Cas des espaces vectoriels normés (sur (...))	65
2.5Compacité (étude topologique)	67
2.5.1Image d'un compact par une fonction continue	69
2.5.2Produit d'espaces compacts	70
2.5.3Partie relativement compacte	70
2.5.4Espace localement compact	71
2.6Compacité (étude métrique)	72
2.6.1Espaces précompacts	73
2.6.2Compacité et continuité uniforme	76
2.7Compacité (espaces $(...)^n$)	77
2.7.1Partie compacte de (...)	77
2.7.2Parties compactes de $(...)^n$	78

2.7.3Compacité et convexité	79
2.7.4Compacité et connexité	81
3Topologie générale	83
3.1Notions générales	83
3.1.1Espace topologique	83
3.1.2Exemple de topologies	84
3.1.3 Systèmes fondamentaux de voisinages	85
3.1.4Ouverts et fermés	85
3.1.5Définition équivalente d'une topologie	86
3.1.6Base d'une topologie	87
3.1.7Adhérence-Intérieur-Extérieur-Frontière	87
3.1.8Comparaison de topologies	89
3.1.9Topologie induite	90
3.1.10Topologie produit	91
3.2Filtres et limites	93
3.2.1Filtre sur un ensemble	93
3.3Ultrafiltres	95
3.3.1Filtre induit	95
3.3.2Filtre image	96
3.3.3Filtre projection	96
3.3.4Filtre produit	96
3.3.5Limite d'un filtre	97
3.3.6Limite dans un espace produit	97
3.3.7Limite d'une fonction suivant un filtre	98
3.3.8Retour sur la continuité	98
3.3.9Retour sur les suites	100
3.3.10Retour sur la complétude	101
3.3.11Retour sur la limite d'une fonction en un point	103
3.3.12Prolongement par continuité uniforme	104
3.4Compléments sur la connexité et la compacité	105
3.4.1Retour sur la connexité	105
3.4.2Retour sur la compacité	107
3.4.3Retour sur la précompacité	109
4Espaces vectoriels Normés	111
4.1généralités	111
4.1.1Propriétés élémentaires	111
4.1.2Continuité des applications multilinéaires	114
4.1.3Continuité des applications linéaires	115
4.1.4Isomorphismes d'espaces normés	116
4.1.5Equivalence de normes	117
4.2Etude des sous-espaces	117
4.2.1Somme directe topologique	118

4.2.2Formes linéaires et hyperplans	119
4.2.3Espace de dimension finie	120
4.3Espace d'applications linéaires continues	123
4.3.1Généralisation aux applications multilinéaires	125
5Espaces fonctionnels	129
5.1Différentes topologies de convergence	129
5.1.1Rappel sur la convergence simple	129
5.1.2Rappel sur la convergence uniforme	130
5.1.3Topologie de la convergence simple	130
5.1.4Topologie de la convergence uniforme	131
5.1.5Cas des applications bornées	132
5.1.6Cas des applications continues	133
5.1.7Cas des applications continues bornées	134
5.1.8Note sur la topologie de la convergence compacte	134
5.1.9Exemple d'application du théorème du point fixe	135
5.2Ensembles équicontinus	135
5.3Approximations de Stone-Weierstrass	140
5.3.1Etude des sous-algèbres de $C_Y(E, (...))$	141
5.3.2Application: Approximation par des polynômes	144
5.3.3Cas des fonctions à valeurs complexes	145
5.3.4Application: Approximation par des polynômes trigonométriques	146
5.4Problèmes de meilleure approximation	148
5.4.1Position du problème	148
5.4.2Théorème d'existence	148
5.4.3Première caractérisation	149
5.4.4Condition de Haar	151
5.4.5Deuxième caractérisation	152
6Exercices	159
Bibliographie	195
Quatrième de couverture	197